שיטות מתמטיות לכלכלנים

ד"ר דוד לגזיאל

המחלקה לכלכלה, אוניברסיטת בן־גוריון בנגב

תקציר

חוברת זו נכתבה **כרשימות מרצה**, בהתבסס על חומרי העזר המעולים של פרופ' עזרא עיני, פרופ' ענר סלע, ופרופ' אורי חיימנקו. ייתכנו אי דיוקים ושגיאות דפוס. אחריות השימוש ברשימות היא על המשתמשים בלבד.

תוכן עניינים

I אופטימיזציה במרחבים אוקלידיים 3

1 קבוצות ופונקציות ב־$\mathbb{R}^n$ 4

1.1 נורמה ומרחקים 4

1.2 קבוצות 5

1.2.1 קבוצות פתוחות וסגורות 5

1.2.2 קבוצות קומפקטיות 6

1.2.3 קבוצות קמורות 7

1.2.4 משפטי הפרדה לקבוצות קמורות 9

1.2.5 שימושים במשפט ההפרדה ־ המשפט הבסיסי של תמחור נכסים 10

1.3 פונקציות ב־$\mathbb{R}^n$ 14

1.3.1 רציפות 14

1.3.2 גזירות 15

1.3.3 נגזרות מסדרים גבוהים 18

1.3.4 פונקציות קמורות וקעורות 18

1.3.5 אפיון קמירות וקעירות בעזרת נגזרות 21

1.3.6 אי־שיוויון יאנסן (Jensen's Inequality) 23

1.4 אופטימיזציה ללא אילוצים 24

חלק I

אופטימיזציה במרחבים אוקלידיים

1 קבוצות ופונקציות ב־$\mathbb{R}^n$

1.1 נורמה ומרחקים

הפרק הראשון בקורס עוסק בבעיות אופטימיזציה במרחבים וקטורים מעל המספרים הממשיים. אבל טרם ניגש לבעיות אלה, נצטרך להכיר היטב את אותם המרחבים. המרחב האוקלידי הבסיסי ביותר הוא הישר הממשי, המיוצג על ידי $\mathbb{R}^1$. למעשה מדובר בכל המספרים הראציונליים והאי־ראציונליים, החיובים והשליליים, שלמים ולא שלמים, וכן הלאה. הפעולות במרחבים הללו הן די טבעיות: חיבור, חיסור, כפל, וחילוק. בנוסף, למדנו בעבר את הגדרות וכללי הגבול מעל סדרות של מספרים ממשיים, ולא נחזור עליהן בשלב זה.

נעבור כעת למישור, המצויין על ידי $\mathbb{R}^2$, מעל המספרים הממשים. המישור מורכב מוקטורים דו־מימדיים, צמדים של ערכים ממשיים, (x_1, x_2), כאשר $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ הם מספרים ממשיים. המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^3$ מורכב מוקטורים בעלי שלושה רכיבים (x_1, x_2, x_3), כאשר כל רכיב הוא מספר ממשי בפני עצמו. במקרה הכללי של $\mathbb{R}^n$, מרכיבי המרחב הם וקטורים $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ באורך n, ו־$x_i \in \mathbb{R}$ לכל i.

דוגמא כלכלית טבעית לשימוש בוקטורים במרחב אוקלידי הוא סל־צריכה. נניח כי האזרחים במדינה כלשהי צורכים תפוחים, בננות, מכוניות, ובקבוקי מים. אזי תיאור סל המורכב מ־2 תפוחים, 3 בננות, 0 מכוניות, ו־10 בקבוקי מים הוא וקטור ב־$\mathbb{R}^4$, ובפרט $(2, 3, 0, 10)$. כמובן שנוכל באופן דומה לייצג סלי צריכה אחרים, הן מבחינה כמותית, והן במרחבים עשירים יותר הכוללים יותר מוצרים.

הפעולות הוקטוריות הבסיסיות כגון חיבור וחיסור וקטורי, מכפלה של וקטור במספר ממשי, ומכפלה וקטורית נלמדות בקורסי המבוא, לכן לא נתעכב עליהן. הנקודה שכן חשובה לענייננו היא מדידת מרחקים בין וקטורים, ולשמה נשתמש במכפלה פנימית. המכפלה הפנימית של צמד וקטורים[1] $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ו־$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ מוגדרת ומסומנת ע"י

$$x \cdot y^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

במילים פשוטות, מכפלה וקטורית מחזירה את הסכום של מכפלת הקוארדינטות, כאשר כל קוארדינטה של וקטור אחד מוכפלת במתאימה לה בוקטור האחר. מכפלה פנימית היא דוגמא פרטית של כפל מטריצות (אשר נלמדה בקורסים קודמים גם כן). חשוב לחזור על התכונות של מכפלה פנימית, שכן היא תשמש אותנו רבות במהלך הקורס.

המכפלה הפנימית משמשת אותנו להגדיר מרחקים, ובפרט את הנורמה של וקטורים. יהי וקטור $x \in \mathbb{R}^n$, באופן גנארי נסמן וקטור כזה ב־$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. הנורמה של x היא שורש המכפלה הפנימית של הוקטור עם עצמו, קרי

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

הנורמה מגדירה את המרחק של הנקודה מן הראשית. לדוגמא, במקרה של $x = (3, 4)$ אנחנו יודעים ממשפט פיטגורס כי המרחק הוא $\sqrt{25} = 5$, ואכן

$$\sqrt{x \cdot x} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{5^2} = 5.$$

באותה המידה, הנורמה משמשת אותנו למדוד מרחקים. המרחק בין צמד וקטורים $x, y \in \mathbb{R}^n$ נתון על ידי $\|x - y\|$, ז"א $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$. לדוגמא, המרחק בין הוקטורים $(0, 1)$ ו־$(4, 1)$ הוא 4 שכן יש ארבע יחידות שמפרידות בין הקוארדינטות הראשונות ואין הבדל בין הקוארדינטות האחרות. אכן,

$$\|(4, 1) - (0, 1)\| = \|(4, 0)\| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4,$$

כנדרש.

[1] נשתמש באינדקסים תחתונים לסמן קוארדינטות, ואינדקסים עליונים לסמן סדרות.

1.2 קבוצות

1.2.1 קבוצות פתוחות וסגורות

קבוצה היא אוסף של נקודות. לדוגמא, הקבוצה $\left\{ x\in\mathbb{R}^2:\ \|x\|\le 1\right\}$ היא אוסף כל הנקודות במישור אשר המרחק שלהן מהראשית קטן או שווה ל־1. שרטטו קבוצה זאת וודאו כי מדובר בעיגול היחידה. דוגמא נוספת היא $\left\{ x\in\mathbb{R}^2:\ \|x\|<1\right\}$ אוסף כל הנקודות במישור שמרחקן מן הראשית קטנה ממש מ־1. גם קבוצה זאת ניתן לייצוג על ידי מעגל היחידה, ללא השפה שלו. ז"א, ניקח את הקבוצה הראשונה ונוריד ממנה את כל הנקודות שמרחקן מן הראשית הוא בדיוק 1. ההבדל בין צמד הקבוצות הללו הוא קריטי מבחינת בעיות אופטימיזציה ־ הראשונה נקראת קבוצה סגורה, והשנייה נקראת פתוחה.

כדור פתוח שמרכזו בנקודה a ורדיוסו $r>0$ מוגדר על ידי הקבוצה $B\left(a,r\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}^n:\ \|x-a\|<r\right\}$. במילים, אוסף כל הנקודות במרחב שהמרחק שלהן מ־a קטן ממש מ־r. לעומת זאת, כדור סגור סביב הנקודה a בעל רדיוס $r>0$ מוגדר על ידי $\overline{B\left(a,r\right)}=\left\{ x\in\mathbb{R}^n:\ \|x-a\|\le r\right\}$ (כל הנקודה במרחב שמרחקן מ־a קטן או שווה ל־r).

הגדרה 1.1 (קבוצה פתוחה) קבוצה A נקראת פתוחה אם לכל נקודה $x\in A$ קיימת סביבה (קרי, קיים כדור פתוח שמרכזו ב־x ורדיוסו קטן כרצונו) כך שכל הסביבה גם כן נמצאת בתוך A.

לדוגמא, אם ניקח את מעגל היחידה הפתוח, אזי לכל נקודה שנבחר בתוכו (זכרו כי המעגל הפתוח אינו כולל את השפה), יש סביבה מספיק קטנה כך שכל הסביבה גם כן תמצא בתוך מעגל היחידה הפתוח. לעומת זאת, אם ניקח את מעגל היחידה הסגור, אז כל נקודה הנמצאת על השפה (דוגמת הנקודה $(0,1)$) לא מקיימת את התנאי הנ"ל. ז"א, לא משנה איזו סביבה של הנקודה $(0,1)$ ניקח, תמיד חלק ממנה לא יימצא בתוך מעגל היחידה, ולכן הקבוצה איננה קבוצה פתוחה. אם נעבור לדוגמאות על הישר, אזי הקבוצה $\left\{ x\in\mathbb{R}:\ 0<x<1\right\}$ היא קבוצה פתוחה, כי עבור כל נקודה שנבחר בקבוצה, תמיד תהיה סביבה מספיק קטנה שתהיה מוכלת כולה בקבוצה המקורית. אבל הקבוצה $\left\{ x\in\mathbb{R}:\ 0\le x\le 1\right\}$ איננה פתוחה, כי ישנה נקודת "קצה" 0 (וגם הנקודה 1) כך שכל סביבה שלה לא תהיה מוכלת בקבוצה המקורית.

ההגדרה של קבוצה סגורה יכולה להתבצע במספר האופנים. ההגדרה הפשוטה ביותר אומרת שקבוצה סגורה היא קבוצה שהמשלים שלה היא קבוצה פתוחה. במילים אחרות, קבוצה היא סגורה אם הקבוצה של כל מה שאינו שייך לה היא קבוצה פתוחה.

הגדרה 1.2 (קבוצה סגורה) הקבוצה A היא קבוצה סגורה אם המשלים שלה היא קבוצה פתוחה.

ההגדרה האלטרנטיבית של קבוצה סגורה היא מעט יותר מסובכת ומצריכה שימוש בגבולות. נסתכל על קבוצה A במרחב $\mathbb{R}^n$ ועל נקודה כלשהי b גם כן באותו המרחב. כעת נשאל את השאלה ־ כמה קרובה הנקודה b לקבוצה A? אם ניתן להתקרב לנקודה, עד כדי מרחק קטן כרצוננו, תוך שימוש אך ורק בנקודות מתוך A, אזי ניתן לקבוע במידה מסויימת שהמרחק בין הקבוצה לבין הנקודה הוא 0. במילים אחרות, אם נוכל לקחת סדרה של נקודות $x^1,x^2,\ldots,x^k,\ldots$ שכולן נמצאות בתוך הקבוצה A ולהראות כי $\lim_{k\to\infty}x^k=b$, אזי אנו למעשה יודעים כי $\lim_{k\to\infty}\left\Vert x^k-b\right\Vert=0$ והמרחק האמיתי בין הקבוצה לנקודה הוא אפס. במקרים כאלה נקרא לנקודה b נקודת גבול של A. קבוצה נקראת סגורה אם כל נקודות הגבול שלה שייכות לה.

הגדרה 1.3 (קבוצה סגורה ־ הגדרה אלטרנטיבית) הקבוצה A היא קבוצה סגורה אם היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה.

נבחן כיצד ההגדרה האחרונה מסתדרת עם הקבוצה $\overline{B\left(0,1\right)}$, כדור היחידה הסגור. ניקח לדוגמא את הנקודה $(1,0)$. תחילה נבדוק האם מדובר בנקודת גבול של הקבוצה. עבור הסדרה הבאה $x_k=\left(1-\frac{1}{k},0\right)$ נקבל שכל הנקודות נמצאות במעגל היחידה וכן שבגבול כאשר $k\to\infty$ מגיעים לנקודה המבוקשת. לכן זוהי נקודת גבול של מעגל היחידה. בנוסף, המרחק של הנקודה מן הראשית הוא 1, לכן היא גם נמצאת במעגל היחידה. משמע, הנקודה הנ"ל מקיימת את התנאי הנדרש. אם אותו הדבר נכון לכל יתר נקודות הגבול, אזי מעגל היחידה הסגור, כפי שהגדרנו אותו, הוא אכן קבוצה סגורה. לו היינו לוקחים נקודה אחרת, לדוגמא $(1.1,0)$, היינו יכולים לראות שהנקודה הספציפית שבחרנו איננה נקודת גבול שכן לא ניתן להתקרב אליה מתוך מעגל היחידה.

שימו לב שלא כל קבוצה היא בהכרח פתוחה או סגורה. ישנן קבוצות שאינן מוגדרות כך או כך. לדוגמא, הקבוצה $\overline{B\left(0,1\right)}\setminus(1,0)$, קרי מעגל היחידה הסגור ללא הנקודה $(1,0)$, איננה קבוצה פתוחה ואיננה קבוצה סגורה. הסיבה שאיננה קבוצה סגורה היא מיידית ־ יש

נקודת גבול שלא שייכת לקבוצה, $(1,0)$. הסיבה שאיננה קבוצה פתוחה נובעת מכך שיש נקודות שנמצאות על ה־"קצה" של הקבוצה, נקודות כגון $(0,1)$. נקודה זאת איננה מקיימת את התנאי הדרוש עבור קבוצה פתוחה כי יש סביבה שלה שאיננה מוכלת בתוך הקבוצה המקורית.

1.2.2 קבוצות קומפקטיות

אחרי שדנו בקבוצות פתוחות וסגורות נעבור לאפיון הבא שנוגע למידה בה הקבוצה חסומה או לא חסומה. במקרה של חסמים, התשובה היא בינארית (קבוצה יכולה להיות חסומה או לא).

הגדרה 1.4 (קבוצה חסומה) קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת חסומה אם קיים מספר חיובי כלשהו $M > 0$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $\|x\| < M$.

במילים פשוטות, קבוצה היא חסומה אם יש מרחק מקסימאלי M כך שהמרחק של כל הנקודות בקבוצה מהראשית קטן יותר מ־M.

הגדרה 1.5 (קבוצה קומפקטית) קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת קומפקטית אם היא סגורה וחסומה.

כעת השאלה המתבקשת היא: מדוע איכפת לנו כל כך מקבוצות חסומות וסגורות? ובכן, הנתון הזה חשוב ביותר בשיקולי אופטימיזציה של פונקציות. נתחיל עם דוגמא בסיסית בישר הממשי. ניקח את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ ונשאל מה ערכי המקסימום שלה והמינימום שלה בקבוצות שונות. אם אנו מסתכלים על הקבוצה הסגורה שמוגדרת על ידי הקטע $[1,2]$, אז המקסימום של הפונקציה מתקבל בנקודה $x = 1$ שם היא שווה גם כן ל־1, בעוד המינימום של הפונקציה מתקבל בנקודה $x = 2$ שם הפונקציה שווה לחצי. לעומת זאת, אם נסתכל על הקטע $(1,\infty)$, אז המקסימום לא ישתנה ועדיין מתקבל בנקודה $x = 1$ בעוד אין כבר נקודות מינימום בקטע. הקטע לא חסום ואנחנו רואים שהפונקציה אומנם שואפת לאפס, אבל בשום נקודה בקטע הפונקציה איננה שווה לאפס, לכן אין לה נקודות מינימום. באופן דומה נוכל להסתכל על הקטע $(0,1)$. כעת נקודת המינימום היא $x = 1$ בעוד אין נקודות מקסימום כי הפונקציה איננה מוגדרת בנקודה $x = 0$ והנקודה עצמה כלל איננה בקטע המדובר.

באופן כללי, ישנו משפט מתמטי רלוונטי בשם 'משפט ויירשטראס' שקובע כי כל פונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית מקבלת ערך מינימאלי ומקסימאלי בתוך הקבוצה. זאת הסיבה לכך שנשאף להסתכל על קבוצות קומפקטיות ופונקציות רציפות. ברגע שיש פונקציות רציפות על קבוצות קומפקטיות, אנחנו יודעים שקיימות נקודות מינימום ומקסימום. ייתכן ונקודות אלה אינן יחידות, אבל הן בהכרח קיימות.

דוגמה 1.6 (קבוצת התקציב של צרכן בשוק עם n מוצרים) נניח כי בשוק ישנו צרכן בודד עם תקציב $w > 0$. בשוק נמכרים n מוצרים בעלי מחירים אי־שליליים $p_1, p_2, \ldots, p_n$. קבוצת התקציב מכילה את כל הסלים שהצרכן יכול לצרוך תחת מגבלת התקציב שלו. בפרט, היא נתונה על ידי $\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ :\ p \cdot x^T = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \le w\right\}$. באילו התנאים הקבוצה הזאת היא קומפקטית ומתי איננה? ובכן, אם המחירים חיובים ממש אז קבוצת התקציב היא חסומה כי לא ניתן לצרוך אף איבר בכמות אינסופית. בנוסף, קבוצת הצריכה היא סגורה כי היא מוגדרת על ידי אי־שיוויון חלש. לעומת זאת, אם מחיר אחד המוצרים הוא אפס אז ניתן לצרוך ממנו כמות אינסופית ולכן הקבוצה לעיל לא תהיה חסומה ובפרט לא תהיה קומפקטית.

כיצד כל זה משפיע על בעיות אופטימיזציה? נניח לצורך העניין שיש צרכן עם פונקצית תועלת על סלי צריכה. ז"א, הפונקציה מקבלת סל צריכה כנתון ומחזירה מספר שמייצג את התועלת של הצרכן מצריכת הסל. אם פונקצית התועלת היא רציפה אז אנחנו בהכרח יודעים שיש סלים אופטימאליים, הן לחיוב (הסלים המייצרים תועלת מקסימאלית) והן לשלילה (סלים המייצרים תועלת מקסימאלית).

תרגיל 1.7 ציירו את קבוצת הצריכה עבור המקרה של צמד מוצרים עם מחירים $p_1 = 1, p_2 = 4$ כאשר $w = 29$. הוכיחו כי הקבוצה קומפקטית.

פתרון: קבוצת התקציב נתונה על ידי $\left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ :\ x_1 + 4x_2 \le 29\right\}$, לכן היא מיוצגת כמשולש במישור התחום על ידי הנקודות $(29,0)$, $\left(0, \frac{29}{4}\right)$ וראשית הצירים. קומפקטיות נובעת מכך שהקבוצה סגורה וחסומה. נוכיח תחילה שהקבוצה חסומה. נבחר נקודה $x = (x_1, x_2)$ בקבוצה. כידוע, $x_1 \le 29$ ו־$x_2 \le \frac{29}{4}$. אזי, נבחר $M = 1000$ ונקבל $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le \sqrt{29^2 + \left(\frac{29}{4}\right)^2} < 1000$ כנדרש. בכדי להוכיח שמדובר בקבוצה סגורה, ניקח סדרה של נקודות $x^1, x^2, \ldots$ השייכות לקבוצה ומתכנסות לנקודה x, ונוכיח שגם נקודת הגבול שייכת לקבוצה. נשים לב שעבור כל נקודה x_n מתקיים $x_1^n + 4x_2^n \le 29$. נניח בשלילה שנקודת הגבול איננה בקבוצה ולכן $x_1 + 4x_2 > 29$.

נסמן $x_1+4x_2=29+\epsilon$ כאשר $\epsilon>0$. בגלל ש־x היא נקודת הגבול של סדרת הנקודות, אזי עבור n מספיק גדול, כל הנקודות יהיו קרובות ל־x עד כדי מרחק קטן כרצוננו. בפרט, נבחר אינדקס מספיק גדול כך שכל נקודה אחריו עם קרובה בכל קוארדינטה עד כדי $\frac{\epsilon}{100}$. לכן,

$$x_1^n+4x_2^n>x_1-\frac{\epsilon}{100}+4\left(x_2-\frac{\epsilon}{100}\right)=x_1-\frac{\epsilon}{100}+4x_2-\frac{\epsilon}{25}>29+\epsilon-\frac{\epsilon}{20}>29,$$

בסתירה לכך ש־x^n בקבוצה. לכן נקודת הקצה שייכת לקבוצה והקבוצה סגורה.

תרגיל 1.8 הוכיחו באופן פורמאלי כי קבוצת התקציב של צרכן בשוק עם n מוצרים שמחירהם חיובים ממש היא קומפקטית.

תרגיל 1.9 עבור כל קבוצה מהקבוצות הבאות קבעו אם היא פתוחה, סגורה, קומפקטית, או קמורה. הוכיחו את טענותיכם.

1. $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y\geq 1,\ x^2+y^2\leq 1\right\}$.
2. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}_+^3:\ x+y+z=1\right\}$.
3. $C=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \|x\|=1\}$.

1.2.3 קבוצות קמורות

הגדרה 1.10 (קבוצה קמורה) קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת קמורה אם לכל צמד נקודות $x,y\in A$ ולכל $0\leq\lambda\leq 1$ מתקיים $\lambda x+(1-\lambda)\,y\in A$.

במילים פשוטות, קבוצה קמורה זו קבוצה שעבור כל שתי נקודות שנבחר מתוכה, גם כל נקודה בינהן נמצאת בתוך הקבוצה.

דוגמה 1.11 מעגל היחידה במישור $B\left(0,1\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^2:\ \|x\|<1\right\}$ זאת קבוצה קמורה. נבחר צמד נקודות $x=(x_1,x_2)$ ו־$y=(y_1,y_2)$ שנבחר במעגל, ונייצר צירוף קמור $\lambda x+(1-\lambda)\,y=(\lambda x_1+(1-\lambda)\,y_1,\lambda x_2+(1-\lambda)\,y_2)$. אם $(x_1y_1+x_2y_2)\leq 1$ נקבל

$$\begin{aligned}\left[\lambda x_1+(1-\lambda)\,y_1\right]^2+\left[\lambda x_2+(1-\lambda)\,y_2\right]^2&=\lambda^2\left(x_1^2+x_2^2\right)+(1-\lambda)^2\left(y_1^2+y_2^2\right)\\&\quad+2\lambda\,(1-\lambda)\,(x_1y_1+x_2y_2)\\&\leq\lambda^2\cdot 1+(1-\lambda)^2\cdot 1+2\lambda\,(1-\lambda)\cdot 1\\&=\lambda^2+1-2\lambda+\lambda^2+2\lambda-2\lambda^2=1.\end{aligned}$$

לכן נותר להראות שהתנאי $(x_1y_1+x_2y_2)\leq 1$ אכן מתקיים. על כן,

$$\begin{aligned}0&\leq(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\\0&\leq\left(x_1^2-2x_1y_1+y_1^2\right)+\left(x_2^2-2x_2y_2+y_2^2\right)\\2\,(x_1y_1+x_2y_2)&\leq\left(x_1^2+x_2^2\right)+\left(y_1^2+y_2^2\right)\\2\,(x_1y_1+x_2y_2)&\leq 2\\(x_1y_1+x_2y_2)&\leq 1\end{aligned}$$

כנדרש.

הגדרה 1.12 תהיינה צמד קבוצות $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$. הסכום של A ו־B מוגדר על ידי הקבוצה הבאה

$$A+B=\{a+b\in\mathbb{R}^n:\ a\in A,\ b\in B\}.$$

טענה 1.13 אם A,B קבוצות קמורות, אז גם $A+B$ קמורה.

הוכחה: ניקח שני איברים c^1 ו־c^2 מהקבוצה $A+B$ ונראה שכל נקודה בינהן גם נמצאת בקבוצה. יהי $\lambda \in [0,1]$ ונסתכל על $\lambda c^1 + (1-\lambda) c^2$. נרצה להוכיח ש־$\lambda c^1 + (1-\lambda) c^2 \in A+B$. מהגדרת הקבוצה $A+B$ נובע שקיימים $a^1, a^2 \in A$ ו־$b^1, b^2 \in B$ כך ש־$c^1 = a^1 + b^1,\ c^2 = a^2 + b^2$. לכן

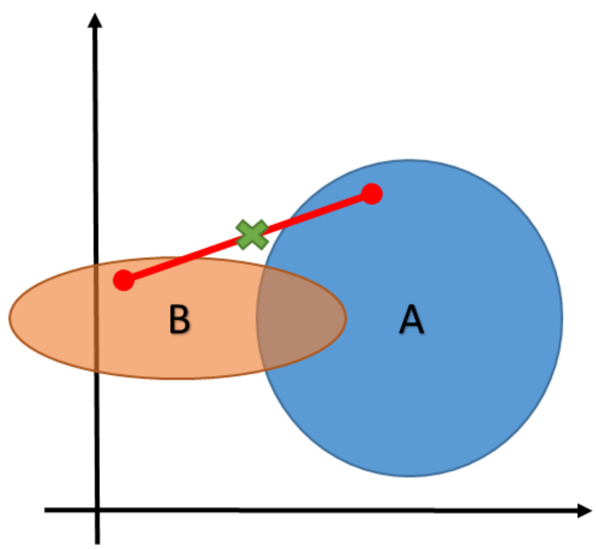
$$\begin{aligned}\lambda c^1 + (1-\lambda) c^2 &= \lambda \left(a^1 + b^1\right) + (1-\lambda)\left(a^2 + b^2\right) \\ &= \left(\lambda a^1 + (1-\lambda) a^2\right) + \left(\lambda b^1 + (1-\lambda) b^2\right).\end{aligned}$$

נשים לב ש־A ו־B הן קבוצות קמורות ולכן $\lambda a^1 + (1-\lambda) a^2 \in A$ ו־$\lambda b^1 + (1-\lambda) b^2 \in B$. על כן, לפי הגדרת $A+B$ נובע שהוקטור $\left(\lambda a^1 + (1-\lambda) a^2\right) + \left(\lambda b^1 + (1-\lambda) b^2\right)$ שייך ל־$A+B$, כנדרש. ■

טענה 1.14 אם A, B קבוצות קמורות, אז $A \cap B$ קמורה.

הוכחה: ניקח שני איברים c^1 ו־c^2 מהקבוצה $A \cap B$ ונראה שכל נקודה בינהן גם נמצאת בקבוצה. יהי $\lambda \in [0,1]$ ונסתכל על $\lambda c^1 + (1-\lambda) c^2$. נרצה להוכיח ש־ $\lambda c^1 + (1-\lambda) c^2 \in A \cap B$. מהגדרת הקבוצה $A \cap B$ נובע ש $c^1, c^2 \in A$ ו־$c^1, c^2 \in B$. לכן העובדה שצמד הקבוצות הן קמורות קובעת כי $\lambda c^1 + (1-\lambda) c^2 \in A$ ו־$\lambda c^1 + (1-\lambda) c^2 \in B$. זאת אומרת, הוקטור $\lambda c^1 + (1-\lambda) c^2$ שייך לצמד הקבוצות A ו־B. משמע הוקטור גם שייך לחיתוך בינהן. במילים אחרות, $\lambda c^1 + (1-\lambda) c^2 \in A \cap B$, כנדרש. ■

בניגוד להוכחה לעיל לגבי חיתוך של קבוצות קמורות, טענה עבור איחוד של קבוצות קמורות איננה בהכרח נכונה, ראו איור 1. לדוגמא, נחשוב על הקבוצות $A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 = 0\right\}$ ו־ $B = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 = 0\right\}$. זאת אומרת, הקבוצה A היא הציר האנכי, בעוד B מייצגת את הציר האופקי. האיחוד שלהם נותן לנו קבוצה שהיא, למעשה, שני צירים המאונכים זה לזה. הנקודה $(0,1)$ שייכת לקבוצה הזאת וכן הנקודה $(1,0)$ שייכת אליה. אבל הנקודה $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(0,1) + \frac{1}{2}(1,0)$ איננה באיחוד הקבוצות ולכן האיחוד איננה קבוצה קמורה.



איור 1: האיחוד של קבוצות קמורות אינו בהכרח קבוצה קמורה. שימו לב כי הקבוצות עצמן קמורות, אבל אם ניקח את צמד הנקודות האדומות שנמצאות באיחוד, אז יש נקודות בינהן שאינן באיחוד ־ ראו קו אדום ונקודה המסומנת בירוק.

תרגיל 1.15 יהי וקטור מחירים $p \in \mathbb{R}^n_+$ ותהיי קבוצת התקציב $A = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ p \cdot x^T \le w\right\}$ של צרכן עם תקציב $0 < w$. הראו כי A קבוצה קמורה.

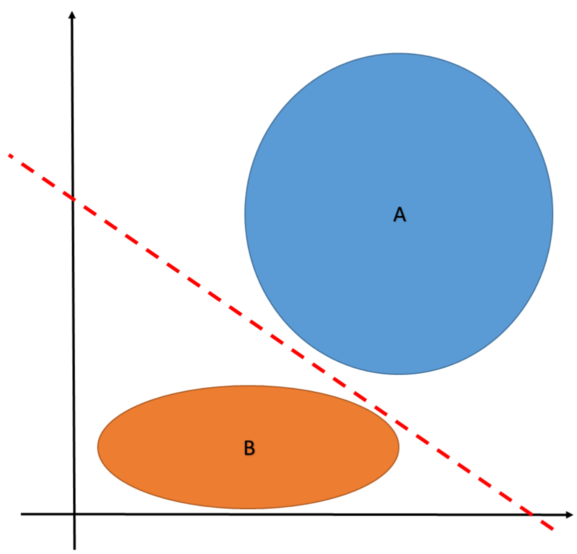
תרגיל 1.16 הסימפלקס ה־n־מימדי זו הקבוצה $\Delta^n = \left\{x \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}$ שמכילה את כל הוקטורים ב־$\mathbb{R}^{n+1}$ אשר כל הקוארדינטות שלהם אי־שליליות וסכומן 1. הראו כי Δ^n היא קבוצה קמורה.

הגדרה 1.17 (קומבינציה קמורה של וקטורים) הוקטור $y \in \mathbb{R}^n$ נקרא קומבינציה קמורה של הוקטורים $x^1, x^2, \ldots, x^k \in \mathbb{R}^n$ אם קיימים קבועים אי־שליליים $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$ שסכומם שווה ל־1 $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ומקיימים $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i = y$.

לדוגמא, נסתכל על הוקטורים $(1,0,1)$ ו־$(0,5,0)$. הוקטור $\left(\frac{4}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)$ הוא קומבינציה קמורה שלהם, כי $\frac{4}{5}(1,0,1) + \frac{1}{5}(0,5,0) = \left(\frac{4}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)$. למעשה, כל הקומבינציות הקמורות של צמד הוקטורים הללו ניתנות לייצוג על ידי הקו שמחבר בין צמד הנקודות. במילים אחרות, קומבינציה קמורה של צמד נקודות היא נקודה שלישית הנמצאת בינהן (ייתכן ושווה לאחת מהן כמובן). באופן דומה, אם ניקח את הוקטורים הקודמים ונוסיף להם את הוקטור $(0,1,1)$, אז הקומבינציות הקמורות של שלושת הוקטורים הללו ניתנות לשיכון בתוך משולש במרחב, אשר קודקודיו הם שלושת הנקודות.

1.2.4 משפטי הפרדה לקבוצות קמורות

משפטי הפרדה מאוד שימושיים בכלכלה. בחלק זה נציג את הרעיון הגיאומטרי שעומד מאחוריהם ויישום מרכזי מתחום הפיננסים. באיור 2 ניתן לראות צמד קבוצות קמורות במישור וישר המפריד בינהן, כך שכל קבוצה נמצאת מצד אחד של הישר. זהו הרעיון שעומד בבסיס משפטי ההפרדה ־ מציאת ישר (או על־מישור) אשר מפריד בין הקבוצות.



איור 2: הפרדה בין קבוצות קמורות בעזרת על־מישור.

הגדרה 1.18 (על־מישור) יהיו וקטור $p \in \mathbb{R}^n$ ומספר $\alpha \in \mathbb{R}$. על־מישור במרחב $\mathbb{R}^n$ זו הקבוצה

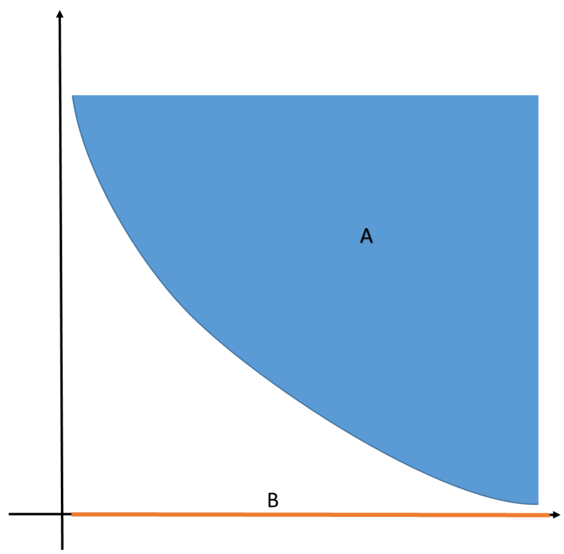
$$H(p,\alpha) = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x \cdot p^T = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \alpha\right\}.$$

נסתכל על מספר דוגמאות לעל־מישור. נתחיל עם דוגמאות במישור. ניקח $p = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ ואת הערך $\alpha = 3$. אזי $H(p,\alpha) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + 2x_2 = 3\right\}$. שימו לב שקיבלנו משוואת קו ישר $x_1 + 2x_2 = 3$ (ליניארית). זאת אומרת שעל־מישור ב־$\mathbb{R}^2$ הוא למעשה קו

ישר. ציירו ואותו וודאו כי אתם מבינים נקודה זאת. נעבור למרחב $\mathbb{R}^3$. נסתכל על הוקטור $p=(2,4,5)$ ועל הערך $\alpha=4$. העל מישור המתקבל הוא $H(p,\alpha)=\left\{x\in\mathbb{R}^3:\ 2x_1+4x_2+5x_3=4\right\}$. אם נייצר זאת במרחב נקבל מישור אינסופי שעובר בנקודות $(2,0,0)$, $(0,1,0)$, ו־$\left(0,0,\frac{4}{5}\right)$. ציירו וראו.

הגדרה 1.19 (הפרדה חלשה וחזקה) אם A ו־B הן שתי קבוצות במרחב $\mathbb{R}^n$, אז על מישור $H(p,\alpha)$ מפריד חלש בינהן אם לכל $a\in A$ ו־$b\in B$ מתקיים $p\cdot a^T=\sum_{i=1}^n a_ip_i\leq\alpha\leq\sum_{i=1}^n b_ip_i=p\cdot b^T$. אם האי־שיוויונים הם חזקים, אז נאמר שהמישור מפריד חזק בין הקבוצות.

שימו לב שלא כל הפרדה היא הפרדה חזקה. לדוגמא, ניקח את הקבוצה $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2:\ xy\geq1\right\}$ ו־$B=\left\{(x,0)\in\mathbb{R}_+^2:\ x\geq0\right\}$. הישר $y=0$ מפריד בין צמד הקבוצות בצורה חלשה כי B מוכלת כולה בתוך הישר, ואילו A נמצאת ממש מעליו וקרובה אליו כרצוננו. ראו איור 3.



איור 3: ניתן להפריד בין הקבוצות בצורה חלשה כי הקבוצות קרובות אחת לשנייה בכל קנה מידה שנבחן.

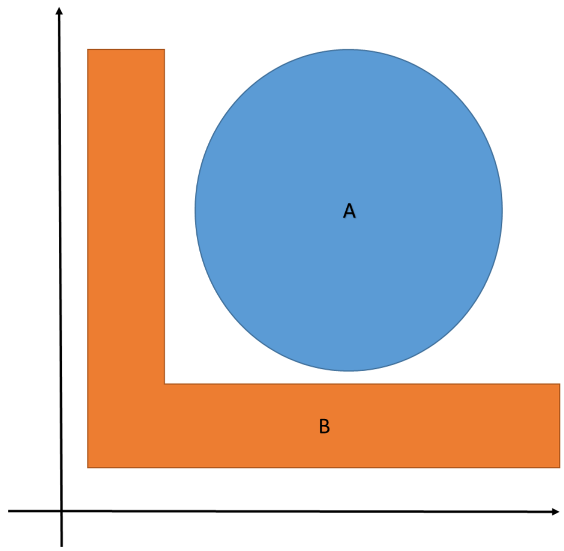
משפט 1.20 (משפט ההפרדה החלש לקבוצות קמורות) אם A ו־B הן שתי קבוצות קמורות וזרות במרחב $\mathbb{R}^n$, אז קיים על־מישור שמפריד חלש בינהן.

התנאי הבסיסי ביותר הוא שהקבוצות יהיו זרות, שכן אם הקבוצות אינן זרות אז ייתכן וההפרדה איננה אפשרית כלל. הדרישה לקמירות נראית היטב באיור 4. אנו רואים שהקבוצות זרות אבל רק אחת מהן קמורה. זאת הסיבה שמשפטי ההפרדה לא תקפים במקרה שאין קמירות: ניתן לייצר קבוצות זרות ולא קמורות שלא ניתנות להפרדה על ידי על־מישור.

משפט 1.21 (משפט ההפרדה החזק לקבוצות קמורות) אם A ו־B הן שתי קבוצות קמורות וזרות במרחב $\mathbb{R}^n$, כאשר A סגורה ו־B קומפקטית, אז קיים על־מישור שמפריד חזק בינהן.

1.2.5 שימושים במשפט ההפרדה ־ המשפט הבסיסי של תמחור נכסים

המשפט הבסיסי של תמחור נכסים (The Fundamental theorem of asset pricing) קובע תנאים הכרחיים לאי־קיום של ארביטראז' בשוק. באופן כללי, ארביטראז' זה מצב בו אנחנו מסוגלים לקנות תיק היום במחיר נמוך ובכל מצב טבע, אליו נגיע מחר, נרוויח. לדוגמא, אם קיים



איור 4: הפרדה בין קבוצות לא קמורות וזרות בעזרת על־מישורים איננה בהכרח אפשרית.

נכס שעולה היום יחידה אחת, אבל בכל מצב טבע אליו נגיע מחר המחיר שלו יהיה לפחות 2, אזי יש מצב של ארביטראז' ויהיה משתלם לאנשים לקנות את הנכס היום כי הוא יניב בהכרח רווח מחר (ביחס למחיר). ברגע שהביקוש יעלה, המחיר יעלה בהתאם עד למצב של ש"מ בו הארביטראז' נסגר.

הנקודה האחרונה היא הקריטית להבנה בנושא ארביטראז'. מדובר במצב לא יציב (אשר אינו ש"מ), כי כל עת שהוא קיים, הביקושים ממשיכים לעלות. מכאן מגיעים לשאלה הבסיסית של אפיון המצבים בהם אין ארביטראז', והמחקר בנושא הביא אותנו למשפט הבסיסי של תמחור נכסים.

נציג תחילה את המודל ואז נעבור למשפט ולהוכחה, כאשר משפטי ההפרדה יסייעו לנו בהוכחה עצמה. ישנם n נכסים ממוספרים $j = 1, \ldots, n$ כאשר המחיר הנוכחי של נכס j הוא $0 < p_j$. בנוסף, ישנם m מצבי טבע אפשריים לתקופה הבאה, ממוספרים $i = 1, \ldots, m$. נסמן ב־d_{ij} את השווי העתידי של נכס j במצב עתידי i, עבור כל i, j אפשריים. זאת אומרת, המטריצה $D = (d_{ij})_{m\times n}$ מייצגת את המחירים העתידים, כאשר כל שורה מתייחסת למצב טבע עתידי, וכל עמודה מתייחסת לנכס כלשהו. בעזרת הנתונים לעיל, נגדיר את המטריצה הבאה $A = \binom{-p}{D}_{m+1\times n}$. המטריצה A היא עדכון של המטריצה D כאשר מוסיפים בשורה הראשונה את וקטור המחירים עם סימן שלילי. באופן מפורש,

$$A = \begin{pmatrix} -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_j & \cdots & -p_{n-1} & -p_n \\ d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1j} & \cdots & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2j} & \cdots & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mj} & \cdots & d_{mn-1} & d_{mn} \end{pmatrix}.$$

מטריצה זאת תשמש אותנו להגדיר בצורה נוחה את תיק הארביטראז'.

הערה 1.22 יהי $y \in \mathbb{R}^n$ וקטור. נסמן ב־$y \geq 0$ את המצב בו כל הקואורדינטות של הוקטור הן אי־שליליות (גדולות או שוות לאפס). בנוסף, נסמן ב־ $y > 0$ את המצב בו כל הקואורדינטות של y אי־שליליות ולפחות אחת מהן גדולה ממש מאפס. קרי $y > 0$ קובע כי $y_j \geq 0$ לכל j, וקיימת לפחות קואורדינטה אחת j' כך ש־$y_{j'} > 0$. נסמן ב־$y \gg 0$ את המצב בו כל הקואורדינטות של y חיוביות ממש.

תיק מוגדר על ידי קומבינציה של נכסים (לא בהכרח קמורה). בפרט, הוקטור $x \in \mathbb{R}^n$ מגדיר תיק, כאשר x_j מציין את כמות היחידות מנכס j בתיק. שימו לב שאנחנו מאפשרים מכירה בחסר ולכן אין בעיה שהערכים הללו גם יהיו שליליים. שווי התיק x במחירים הנוכחיים הוא $p \cdot x^T = \sum_{j=1}^n p_j x_j$. תיק ארביטראז' x מוגדר כתיק המקיים

$$Ax^T = \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \sum_{j=1}^n d_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n d_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n d_{mj} x_j \end{pmatrix} > 0.$$

במילים פשוטות, זהו תיק כך שהשווי הנוכחי שלו הוא אפס או שלילי ואילו השווי העתידי שלו לא יוכל להיות שלילי. בפרט, אם השווי הנוכחי הוא אפסי, אז השווי העתידי הוא אי־שלילי ולפחות במצב אחד הוא חיובי ממש. אפשרות אחרת היא שהשווי הנוכחי הוא שלילי ובכל מצב עתידי השווי הוא אי־שלילי. החלק הנוח בכתיב הנ"ל הוא שכל ההסברים הללו מתומצתים לכדי הנוסחה הפשוטה $Ax^T > 0$.

כעת נעבור לשאלה המרכזית ־ מתי לא קיים תיק ארביטראז'? כאמור, השאלה הזאת מביאה אותנו למשפט הבסיסי של תמחור נכסים, אשר לעיתים נקרא The Fundemental Theorem of Finance. המשפט קובע כי לא קיים תיק ארביטראז' אם ורק אם קיים כלל תמחור חיובי המסוגל לתמוך במערכת המחירים הנוכחית. באופן ספציפי, כלל תמחור חיובי זהו וקטור $q \in \mathbb{R}^m$ $\gg 0$ שכל רכיביו חיוביים ממש ותומך במערכת המחירים p כך ש־ $p = qD$. במילים פשוטות, אפשר לייצר את מערכת המחירים הנוכחית p בעזרת השווי העתידי שלהם לפי הוקטור q. לדוגמא, נסתכל על המחיר p_j. אם קיים כלל תמחור חיובי q, אזי

$$p_j = q \cdot \begin{pmatrix} d_{1j} \\ d_{2j} \\ \vdots \\ d_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m q_i d_{ij}.$$

שימו לב שאותו הכלל נכון עבור כל נכס j. אם כן, מה החשיבות מאחורי הכלל המדובר? כלל תמחור חיובי אומר שהשווי הנוכחי של כל נכס j קשור לתוחלת השווי העתידית. אם ניקח את q וננרמל אותו, נקבל וקטור הסתברויות ־ התפלגות הסתברות על מצבי הטבע. תחת ההתפלגות הזאת, השווי הנוכחי מייצג בדיוק את תוחלת השווי מחר.

משפט 1.23 (המשפט הבסיסי של תמחור נכסים) לא קיים תיק ארביטראז' אם ורק אם קיים כלל תמחור חיובי.

הוכחה: אנחנו צריכים להוכיח שתי טענות, אחת עבור כל כיוון במשפט. נתחיל עם החלק הקל. נניח כי קיים כלל תמחור חיובי ונראה כי לא קיים תיק ארביטראז'. נוכיח על דרך השלילה. ניקח את כלל התמחור החיובי q כך ש־ $p = qD$ ונניח בשלילה שיש תיק ארביטראז' x המקיים $Ax^T > 0$. על כן, מהתנאי $Ax^T > 0$ נובע $Dx^T \geq 0$ ו־$px^T \leq 0$. אבל,

$$0 \geq px^T = (qD)\, x^T = q \left(Dx^T\right) \geq 0.$$

כאשר הא"ש האחרון נובע מ־$q \gg 0$ ו־$Dx^T \geq 0$. אזי $px^T = q\left(Dx^T\right) = 0$ והשווי הנוכחי הוא אפס. אבל, גם השווי העתידי הוא אפס בכל מצב, אחרת $Dx^T > 0$ ו־$q \gg 0$ גוררים $0 = px^T = q\left(Dx^T\right) > 0$, וזאת כמובן סתירה. לסיכום, השווי הנוכחי והעתידי של התיק הוא אפס ומטה ולכן זאת סתירה לקיום תיק ארביטראז' x.

נעבור להוכחת הכיוון השני. נניח כי לא קיים תיק ארביטראז' ונמצא את כלל התמחור q המבוקש. נניח שלא קיים תיק ארביטראז' ונסתכל על הקבוצה $S = \left\{Ax^T \in \mathbb{R}^{m+1} : \ x \in \mathbb{R}^n\right\}$. במילים, נסתכל על כל התיקים האפשריים x, ועבור כל תיק נסתכל על אפשרות הארביטראז' שלו. בנוסף, נסתכל על $\Delta^m = \left\{x \in \mathbb{R}_+^{m+1} : \ \sum_{i=1}^{m+1} x_i = 1\right\}$. הקבוצה הזאת נקראת הסימפלקס ה־m־מימדי, והוא מכיל את כל וקטורי ההסתברות בעלי $m+1$ קואורדינטות.

שימו לב שכל סימפלקס הוא קבוצה קומפקטית המשוכנת באורנטטה החיובית, לכן הסימפלקס והקבוצה S הן זרות, כי S לא חותכת את האורטנטה החיובית (אחרת היה מדובר בארביטראז'). בנוסף, קל לוודא כי מדובר בקבוצות קמורות: עבור כל צמד וקטורי הסתברות, כל קומבינציה קמורה שלהם תיתן וקטור הסתברות גם כן; עבור כל צמד וקטורים ב־S, Ax_1^T ו־Ax_2^T, נקבל ש־

$$\begin{aligned}\lambda Ax_1^T+(1-\lambda)\,Ax_2^T&=A\lambda x_1^T+A\,(1-\lambda)\,x_2^T\\&=A\left[\lambda x_1^T+(1-\lambda)\,x_2^T\right]\\&=A\left[\lambda x_1+(1-\lambda)\,x_2\right]^T\in S\end{aligned}$$

מאחר ו־$\lambda x_1+(1-\lambda)\,x_2\in\mathbb{R}^{m+1}$. אם כך, הקבוצות הינן זרות וקמורות, הסימפלקס הוא קבוצה קומפקטית, ו־S סגורה, על כן קיים על־מישור שמפריד חזק בינהן. נסמנו ב־$H(y,\alpha)$. זאת אומרת, לכל וקטור q באורנטטה החיובית מתקיים $y\cdot q^T>\alpha$ ולכל וקטור $s\in S$ מתקיים $y\cdot s^T<\alpha$ (במידה וכיווני הא"ש הפוכים, תמיד נוכל לכפול אותם ב־-1 ולקבל את הצורה לעיל עבור α ו־y עם סימנים הפוכים). הוקטור שמורכב כולו מאפסים שייך לקבוצה S ו־ $0<\alpha$ $y\cdot(0,\dots,0)^T=0$, אזי בהכרח $\alpha>0$. אם ל־y יש קוארדינטה שאיננה חיובית ממש, לדוגמא הקוארדינטה הראשונה, אז ניקח את הוקטור $(1,0,0,\dots,0)\in\Delta^m$ ונקבל $y\cdot(1,0,0,\dots,0)^T\le 0<\alpha$ וזאת סתירה להפרדה. לכן כל הקוארדינטות של y חיוביות ממש. לסיכום, קיבלנו שלכל $s=Ax^T\in S$ מתקיים $y\cdot s=y\left(Ax^T\right)<\alpha$ כאשר $y\gg 0$.

נבחר וקטור $s\in S$. אם $s\in S$, אז גם $-s\in S$ – כי עבור וקטור x המקיים $Ax^T=s$, אפשר לקחת את הוקטור $-x$ – ולקבל $A\,(-x)^T=-s$. לכן $s,-s\in S$, וידוע ש־ $y\cdot s^T<\alpha$ וגם $-y\cdot s^T<\alpha$. זאת אומרת,

$$-\alpha<y\cdot s^T<\alpha.$$

אבל הטענה הזאת נכונה עבור כל וקטור $s\in S$ שנבחר. בפרט, אם נכפול את כל הוקטורים בקבוע $0<M$, נקבל ש־

$$\begin{aligned}-\alpha<\quad &M\left(y\cdot s^T\right)\quad<\alpha\\&\Downarrow\\-\frac{\alpha}{M}<\quad &y\cdot s^T\quad<\frac{\alpha}{M}.\end{aligned}$$

מאחר ו־M גדול כרצוננו, נובע ש־ $y\cdot s^T=0$, ובפרט $y\left(Ax^T\right)=0$ עבור כל $x\in\mathbb{R}^n$.

נבחר וקטור $e_j=(0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (כאשר כל ערכי הוקטור הם אפס למעט ערך יחיד השווה ל־1 בקוארדינטה ה־j) ונקבל

$$y\left(Ax^T\right)=(y_0,y_1,y_2,\dots,y_m)\cdot\begin{pmatrix}-p_1&-p_2&\cdots&-p_j&\cdots&-p_{n-1}&-p_n\\d_{11}&d_{12}&\cdots&d_{1j}&\cdots&d_{1,n-1}&d_{1n}\\d_{21}&d_{22}&\cdots&d_{2j}&\cdots&d_{2,n-1}&d_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\d_{m1}&d_{m2}&\cdots&d_{mj}&\cdots&d_{mn-1}&d_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$=(y_0,y_1,y_2,\dots,y_m)\cdot\begin{pmatrix}-p_j\\d_{1j}\\d_{2j}\\\vdots\\d_{mj}\end{pmatrix}=-y_0p_j+\sum_{i=1}^m y_id_{ij}$$

לכן המשוואה $y\left(Ax^T\right)=0$ קובעת כי $-y_0p_j+\sum_{i=1}^m y_id_{ij}=0$, או לחילופין, $\sum_{i=2}^{m+1}\frac{y_i}{y_0}d_{ij}=p_j$. נגדיר $0<q_i=\frac{y_i}{y_0}$ לכל מצב עתידי i, ונקבל שלכל מוצר j ולכל מחיר p_j, מתקיים $p_j=(qD)_j$, כנדרש. ■

1.3 פונקציות ב־$\mathbb{R}^n$

בקורס נעסוק לרוב בפונקציות מ־$\mathbb{R}^n$ ל־$\mathbb{R}$, קרי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. פונקציות אלה מקבלות וקטורים כקלט, ומחזירות ערך מספרי כלשהו. הדוגמא המיידית לפונקציה כזאת היא פונקצית התועלת של צרכן כתוצאה מצריכה. צרכן כלשהו מקבל סל אותו הוא צורך (מזון, תרבות, וכד'). כתוצאה מהצריכה הוא זוכה בתועלת כלשהי המיוצגת על ידי מספר. פונקצית התועלת היא בדיוק פונקציה מ־$\mathbb{R}^n$, כאשר כל וקטור מייצג סל כלשהו, לציר הממשי שמייצג את התועלת מאותה הצריכה.

דוגמה 1.24 להן מספר דוגמאות לפונקציות ממרחבים שונים לישר הממשי.

$$\begin{aligned}
f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} &\quad\Rightarrow f(x)=x^2,\\
f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} &\quad\Rightarrow f(x,y)=xy+4,\\
f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} &\quad\Rightarrow f(x,y,z)=y^2+xz,\\
f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R} &\quad\Rightarrow f(x)=\sqrt{x},\\
f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} &\quad\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}\\
f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} &\quad\Rightarrow f(x_1,\ldots,x_n)=\max\{x_1,\ldots,x_n\}.
\end{aligned}$$

1.3.1 רציפות

באופן כללי, פונקציה היא רציפה בנקודה אם מתקיימים שלושה תנאים:

1. הפונקציה מוגדרת בנקודה.
2. הגבול של הפונקציה בנקודה קיים.
3. ערך הפונקציה שווה לערך הגבול בנקודה.

פורמאלית, נגדיר רציפות באופן הבא.

הגדרה 1.25 (פונקציה רציפה) הפונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפה בנקודה x^0 אם $\lim_{x\to x^0} f(x)=f\left(x^0\right)$.

שימו לב כי ההגדרה אכן מקיימת את שלושת התנאים שהוזכרו לעיל. בנוסף, כדאי לציין שהגדרת הגבול במקרה של פונקציה מרובת משתנים מתבסס על חישוב מרחקים בעזרת הנורמה. בפרט, הגבול של הפונקציה בנקודה x^0 שווה ל־L אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ המקיים $\left\|x-x^0\right\|<\delta$ מתקיים $\left|f(x)-f\left(x^0\right)\right|<\epsilon$. במילים פשוטות, הגבול שווה ל־L אם בכל נקודה x, מספיק קרובה ל־x^0, הערך של הפונקציה מספיק קרוב ל־L.

דוגמה 1.26 נסתכל על הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{xy^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

די ברור כי הפונקציה רציפה בכל נקודה שאיננה $(0,0)$ כי המונה והמכנה הם פולינומים ב־x ו־y ופולינומים הן פונקציות רציפות. לכן מחוקי הגבול (סגום של גבול שווה לסכום הגבולות, וכן לגבי מכפלה וחילוק) נובעת רציפות. לעומת זאת, בנקודה $(0,0)$ צריך לבדוק רציפות בצורה

יותר יסודית. נשים לב שהפונקציה מוגדרת בנקודה ושווה ל־0. בנוסף,

$$0 \leq \left|\frac{xy^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|\,y^4}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|\,y^4}{y^2} = |x|\,y^2 \to 0, \quad \text{as} \quad x,y \to 0.$$

זאת אומרת, הפונקציה שואפת לאפס כאשר $(x,y) \to (0,0)$ ונקבל שהגבול של הפונקציה קיים ושווה לערך שלה בנקודה. על כן, הפונקציה רציפה בכל נקודה במישור.

נעבור לדוגמא נוספת המציגה דווקא פונקציה שאיננה רציפה במישור.

דוגמה 1.27 נסתכל על הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

כפי שראינו בדוגמא הקודמת, הפונקציה עצמה רציפה בכל נקודה שאיננה $(0,0)$ מאריתמטיקה של גבולות ושל פונקציות רציפות, לכן נתרכז בנקודה $(0,0)$. נסתכל על $(x,y) \to (0,0)$ בשני מסלולים שונים ונראה האם התוצאה תלויה באופן בו מתקרבים לראשית הצירים. כאשר $x = y \to 0$ נקבל

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3x}{x^6+x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

לעומת זאת, אם $y = 2x^3$ ו־$x \to 0$ אז נקבל

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 2x^3}{x^6+(2x^3)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^6}{x^6+4x^6} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

לכן התוצאה תלויה באופן בו מתקרבים לנקודה $(0,0)$ והגבול לא קיים בנקודה הזאת.

שימו לב כי בדוגמא האחרונה הבעיה הייתה שהגבול עצמו לא היה קיים, אבל יכולות להיות בעיות אחרות מבחינת רציפות. לדוגמא, הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 4, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

איננה רציפה בגלל שהערך של הפונקציה בנקודה $(0,0)$ אינו שווה לגבול. ז"א, הגבול של הפונקציה קיים, אבל יש אי־רציפות כי הגבול והערך של הפונקציה בנקודה $(0,0)$ שונים זה מזה.

1.3.2 גזירות

הגדרה הנגזרת במקרה החד־מימדי היא פשוטה.

הגדרה 1.28 (נגזרת של פונקציה במשתנה בודד) פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בנקודה x^0 אם הגבול הבא קיים

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x^0)}{x-x^0}.$$

אם הגבול קיים, אז ערכו יהיה הנגזרת של הפונקציה בנקודה ויסומן ב־$f'(x^0)$.

לחילופין, בעזרת החלפת משתנים אפשר להציג את הגבול הנ"ל כ־

$$f'(x^0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x^0+h)-f(x^0)}{h}.$$

דוגמה 1.29 נסתכל על הפונקציה $f(x)=x^2$ ונחשב את הנגזרת שלה בנקודה 2 לפי ההגדרה.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

ז"א, הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x^2$ קיימת בנקודה 2 ושווה ל־4. באופן כללי, לו היינו מחשבים את הנגזרת בנקודה x כלשהי, היינו מקבלים $2x$.

במקרה של פונקציות מרובות משתנים, הגדרת הנגזרת יותר בעייתית. הסיבה לכך נעוצה במספר דרגות החופש. אם נגזרת מייצגת את השיפוע של פונקציה בנקודה, אז כעת ניתן להסתכל על השיפוע במספר רב של כיוונים, תוך שינוי כל ארגומנט בנפרד. לכן הדיון במקרה הרב־מימדי נסוב סביב נגזרות חלקיות. באופן כללי, נגזרת חלקית משמע קיבוע כל הקוארדינטות למעט אחת, ואז גזירה של הקוארדינטה היחידה שאיננה קיבענו, בדומה לנגזרת של פונקציה במשתנה אחד.

הגדרה 1.30 (נגזרת חלקית) תהי פונקציה מרובת משתנים $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ונסתכל על הקוארדינטה x_i. הפונקציה גזירה בנקודה x^0 לפי קוארדינטה i אם הגבול הבא קיים

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x^0+(0,\dots,0,h,0,\dots,0)\right)-f(x^0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_1^0,x_2^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i^0+h,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0\right)-f(x^0)}{h}.$$

אם הגבול הנ"ל קיים, אז נגיד שהפונקציה גזירה בנקודה x^0 לפי x_i, ונסמן את הנגזרת ב־ $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}=f_i'(x^0)$. לערך זה נקרא הנגזרת החלקית של f לפי x_i, בנקודה x^0.

במילים פשוטות, הנגזרת החלקית של פונקציה לפי קוארדינטה x_i היא הנגזרת של הפונקציה החד־מימדית המתקבלת מקיבוע כל הקוארדינטות של f, למעט הקוארדינטה ה־i. קרי, שומרים את כל הקוארדינטות קבועות למעט הקוארדינטה שגוזרים לפיה, ואז מקבלים פונקציה חד־מימדית התלויה רק ב־x_i, אשר ניתן לגזור בדיוק כפי שגוזרים כל פונקציה עם משתנה יחיד.

דוגמה 1.31 נסתכל על הפונקציה $f(x,y)=2x^2y+3xy^3$ ונמצא את הנגזרות החלקיות לפי x ולפי y.

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=4xy+3y^3,$$
$$f_y(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2x^2+9xy^2.$$

טענה 1.32 אם פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בנקודה x^0, אז היא רציפה בנקודה הזאת גם כן.

הוכחה: נחשב את הגבול בצורה ישירה.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right] &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\cdot\left(x-x_0\right)\right]\\ &= \left[\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\right]\left[\lim_{x\to x_0}\left(x-x_0\right)\right]\\ &= f'\left(x_0\right)\cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

לכן הגבול קיים ושווה ל־$f\left(x_0\right)$. ■

הטענה הנ"ל נכונה למקרה החד־מימדי, אבל במקרה של פונקציה מרובת משתנים, המצב משתנה. קיום נגזרות חלקיות לא גורר רציפות כפי שהדוגמא הבאה מדגימה.

דוגמה 1.33 נבחן את הפונקציה

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right),\\ 0, & \left(x,y\right)=\left(0,0\right).\end{cases}$$

נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה $\left(0,0\right)$,.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x,0\right)-f\left(0,0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0.$$

חישוב דומה יתקבל עבור הנגזרת החלקית לפי y. אבל, נסתכל על הגבול בנקודה $\left(0,0\right)$ כאשר $y=2x$ ונקבל

$$\lim_{\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)}f\left(x,y\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 2x}{x^2+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\neq 0=f\left(0,0\right).$$

לכן הפונקציה איננה רציפה בנקודה.

הגדרה 1.34 (פונקציה דיפרנציאבילית) פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נקראת דיפרנציאבילית בנקודה x^0 אם כל הנגזרות החלקיות שלה בנקודה זאת קיימות ורציפות.

דוגמה 1.35 נסתכל על הפונקציה

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right),\\ 0, & \left(x,y\right)=\left(0,0\right).\end{cases}$$

נחשב את הנגזרות החלקיות שלה בנקודה $\left(0,0\right)$ ונראה שהן רציפות. משיקולי סימטריה נבחן רק את הקואורדינטה הראשונה (חישובים מתאימים עבור הקואורדינטה השנייה יניבו תוצאות דומות).

$$\begin{aligned}f_x\left(x,y\right) &= \frac{2xy^2\left(x^2+y^2\right)-x^2y^22x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x^3y^2+2xy^4-2x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2},\\ f_x\left(0,0\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{f\left(x,0\right)-f\left(0,0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0,\\ \lim_{\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)}\left|f_x\left(x,y\right)\right| &= \lim_{\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)}\left|\frac{2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right|\leq\lim_{\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)}\left|\frac{2xy^4}{y^4}\right|=\lim_{\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)}\left|2x\right|=0=f_x\left(0,0\right).\end{aligned}$$

לכן הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות. נשים לב שהפונקציה עצמה גם רציפה ־ הוכיחו זאת!

טענה 1.36 אם הפונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית בנקודה x^0, אז היא רציפה בנקודה זאת.

1.3.3 נגזרות מסדרים גבוהים

נגזרות חלקיות הן בעצמן פונקציות מרובות משתנים ולכן ניתן לגזור אותן שוב ושוב. בעת גזירה של נגזרת חלקית, מקבלים נגזרת חלקית מסדר שני (לנגזרות המקוריות נקרא נגזרות חלקיות מסדר ראשון). בפרט, לכל פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ולכל צמד קוארדינטות x_i,x_j נגדיר

$$f_{i,j}^{(2)}\left(x^0\right)=\frac{\partial^2 f\left(x^0\right)}{\partial x_j\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f_i'\left(x^0+h\cdot e_j\right)-f_i'\left(x^0\right)}{h},$$

להיות הנגזרת החלקית מסדר שני, לפי x_i,x_j, בנקודה x^0. שימו לב כי e_j זה הוקטור שכל ערכיו אפסים למעט קוארדינטה j השווה ל־1.

במילים פשוטות, לאחר גזירה ראשונה של פונקציה, ניתן לגזור אותה בשנית לפי כל קוארדינטה שנרצה, ואז מקבלים נגזרות מסדרים גבוהים יותר. אנו נעזר בנגזרות הללו בכדי לסווג נקודות מינימום ומקסימום וכן בכדי לזהות קמירות/קעירות של פונקציות.

תרגיל 1.37 מצאו את כל הנגזרות החלקיות מסדר ראשון, שני, ושלישי של הפונקציה $f\left(x,y\right)=2x^2y+3xy^3$.

1.3.4 פונקציות קמורות וקעורות

תכונה חשובה לפונקציות, בעיקר בתחום הכלכלה והפיננסים, היא קעירות וקמירות. פונקציית ייצור CES $Q\left(x,y\right)=\left(\alpha x^\rho+\left(1-\alpha\right)y^\rho\right)^{1/\rho}$ לכל $\alpha\in\left(0,1\right)$ ו־ $\rho<1$ היא פונקציה קעורה. גם פונקציות תועלת לרוב נוטות לקעירות מסויימת כדי לשקף אלמנטים של שנאת סיכון (הגרלות מניבות תועלת נמוכה יותר מאשר סכומים ודאים).

הגדרה 1.38 (פונקציה קעורה קמורה) תהיי פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. הפוניקציה נקראת קעורה אם לכל צמד נקודות $x^1,x^2\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha\in\left[0,1\right]$ מתקיים

$$f\left(\alpha x^1+\left(1-\alpha\right)x^2\right)\geq\alpha f\left(x^1\right)+\left(1-\alpha\right)f\left(x^2\right).$$

הפונקציה נקראת קעורה חזק (או קעורה ממש) אם הא"ש לעיל הוא א"ש חזק. הפונקציה נקראת קמורה אם לכל צמד נקודות $x^1,x^2\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha\in\left[0,1\right]$ מתקיים

$$f\left(\alpha x^1+\left(1-\alpha\right)x^2\right)\leq\alpha f\left(x^1\right)+\left(1-\alpha\right)f\left(x^2\right).$$

הפונקציה נקראת קמורה חזק (או קמורה ממש) אם הא"ש לעיל הוא א"ש חזק.

שימו לב שפונקציה לינארית היא קעורה וקמורה בו־זמנית, לפי ההגדרה.

הערה 1.39 (הקשר בין קמירות וקעירות של פונקציות) אם פונקציה f היא קעורה, אז הפונקציה $-f$ היא קמורה ולהיפך.

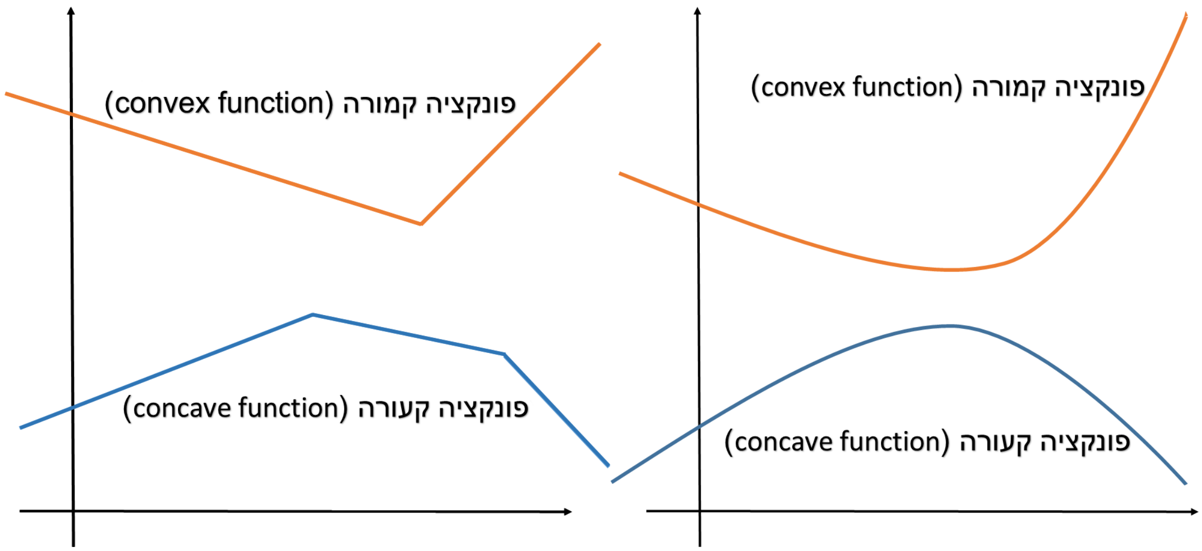
הגדרה 1.40 (פונקציה קאוזי־קעורה וקואזי־קמורה) תהיי פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. הפוניקציה נקראת קעורה אם לכל צמד נקודות $x^1,x^2\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha\in\left[0,1\right]$ מתקיים

$$f\left(\alpha x^1+\left(1-\alpha\right)x^2\right)\geq\min\left\{f\left(x^1\right),f\left(x^2\right)\right\}.$$

הפונקציה נקראת קואזי־קעורה חזק (או קואזי־קעורה ממש) אם הא"ש לעיל הוא א"ש חזק. הפונקציה נקראת קואזי־קמורה אם לכל צמד נקודות $x^1,x^2\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\alpha\in\left[0,1\right]$ מתקיים

$$f\left(\alpha x^1+\left(1-\alpha\right)x^2\right)\leq\max\left\{f\left(x^1\right),f\left(x^2\right)\right\}.$$

הפונקציה נקראת קואזי־קמורה חזק (או קואזי־קמורה ממש) אם הא"ש לעיל הוא א"ש חזק.



איור 5: פונקציות קמורות וקעורות.

ההגדרות הנ"ל לפונקציות קואזי־קמורות וקואזי־קמורות ניתנות לייצוג גם בצורה אחרת. לדוגמא, פונקציה היא קואזי־קמורה אם כל קבוצה מהצורה $S_k(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \le k\}$ היא קבוצה קמורה. ראו כיצד ההגדרה האחרונה מתאימה לאיור 6.

טענה 1.41 הוכיחו כי פונקציה היא קואזי־קמורה אם ורק אם לכל מספר ממשי k הקבוצה $S_k(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \le k\}$ היא קבוצה קמורה.

הוכחה: נניח כי הפונקציה f היא קואזי־קמורה ונוכיח שהקבוצה $S_k(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \le k\}$ היא קמורה. אם הקבוצה ריקה אז הטענה מתקיימת באופן ריק ולכן נניח שהיא לא ריקה ונבחר צמד נקודות מתוכה $x^1, x^2 \in S_k(f)$.

$$f\left(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2\right) \le \max\left\{f\left(x^1\right), f\left(x^2\right)\right\} \le k,$$

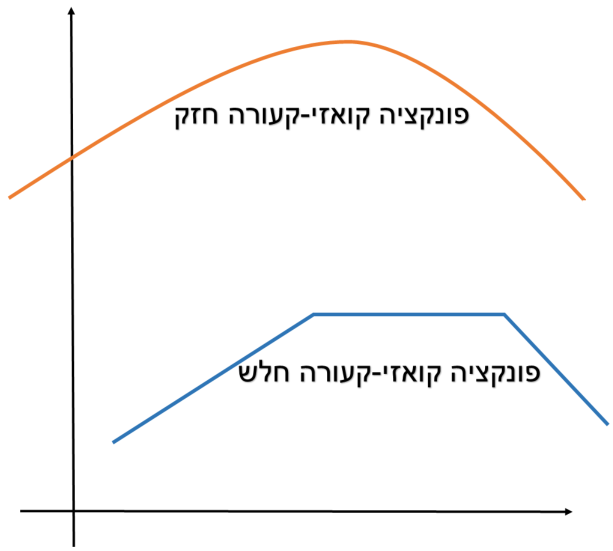
לכן גם הנקודה $\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$ שייכת לקבוצה. מכאן נובע שהקבוצה קמורה. כעת נניח שהקבוצה קמורה ונוכיח שהפונקציה היא קואזי־קמורה. ניקח שתי נקודות x^1, x^2 ו־$\alpha \in (0,1)$. נבחר $k = \max\left\{f\left(x^1\right), f\left(x^2\right)\right\}$ ולכן צמד הנקודות שייכות לקבוצה הקמורה $S_k(f)$. בנוסף, בגלל שנתון כי הקבוצה קמורה, אזי גם $\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$ שייך לקבוצה, ובפרט $f\left(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2\right) < k = \max\left\{f\left(x^1\right), f\left(x^2\right)\right\}$ כנדרש. ■

תרגיל 1.42 הוכיחו כי פונקציה היא קואזי־קעורה אם ורק אם לכל מספר ממשי k הקבוצה $S_k(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \ge k\}$ היא קבוצה קמורה.

שימו לב שהפונקציה $f(x,y) = \min\{x,y\}$ היא פונקציה קואזי־קעורה כי הקבוצה $S_k(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \ge k\}$ היא קמורה. שרטטו וראו. כמו כן, הוכיחו לעצמכם כי הפונקציה $f(x,y) = \max\{x,y\}$ היא פונקציה קואזי־קמורה כי הקבוצה $S_k(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \le k\}$ היא קמורה.

תרגיל 1.43 הוכיחו כי סכום של פונקציות קעורות הוא פונקציה קעורה.

תרגיל 1.44 תהיי פונקציה f קעורה על קבוצה סגורה $A \subset \mathbb{R}^n$. הראו שלכל $k \in \mathbb{R}$ הקבוצה $A_k = \{x \in A :\ f(x) \ge k\}$ היא סגורה.



איור 6: פונקציות קואזי־קעורות חלש וחזק. שימו לב שהכפלה של הפונקציות ב־(-1) תהפוך את הפונקציות לקואזי־קמורות חלש וחזק, בהתאמה.

תרגיל 1.45 יהיו פונקציות f, g המוגדרות על קבוצה קמורה $A \subset \mathbb{R}^n$. נניח כי f קעורה ו־g קמורה. הוכיחו כי הקבוצה $\{x \in A: \ f(x) \geq g(x)\}$ היא קמורה.

טענה 1.46 אם פונקציה $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא קעורה אז היא גם קואזי־קעורה.

הוכחה: ניקח צמד נקודות x^1, x^2 ומספר $\alpha \in [0,1]$. אזי מקעירות נובע

$$\begin{aligned} f\left(\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2\right) &\geq \alpha f\left(x^1\right) + (1-\alpha) f\left(x^2\right) \\ &\geq \alpha \min\left\{f\left(x^1\right), f\left(x^2\right)\right\} + (1-\alpha) \min\left\{f\left(x^1\right), f\left(x^2\right)\right\} \\ &= \min\left\{f\left(x^1\right), f\left(x^2\right)\right\}, \end{aligned}$$

כנדרש. ■

טענה 1.47 הפונקציה f היא קואזי־קעורה אם ורק אם לכל פונקציה מונוטונית עולה g הפונקציה $g \circ f$ היא קואזי־קעורה.

דוגמה 1.48 שימו לב כי פונקציה קואזי־קעורה איננה בהכרח קעורה. ניקח לדוגמא פונקציה $f(x,y) = x^2 y^2$. אזי

$$f(1,1) = 1, \ \ f(2,2) = 16, \ \ f(3,3) = 81,$$

אבל

$$\frac{1}{2} f(1,1) + \frac{1}{2} f(3,3) = 41 > 16 = f\left(\frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(3,3)\right).$$

לכן הפונקציה איננה קעורה. לעומת זאת, ניקח פונקציה מונוטונית עולה $g(t) = \ln(t)$, ונקבל

$$g(f(x,y)) = \ln\left(x^2 y^2\right) = \ln\left(x^2\right) + \ln\left(y^2\right) = 2\left(\ln(x) + \ln(y)\right),$$

והפונקציה שקיבלנו היא סכום של פונקציות קעורות ולכן קעורה בעצמה. משמע, לפי טענה קודמת, הפונקציה f היא גם קואזי־קעורה, למרות שאיננה קעורה.

תרגיל 1.49 הראו כי הפונקציה $f\left(x\right)=x^{2}-k$ עבור k כלשהו, היא פונקציה קמורה, קאוזי־קמורה, וקואזי־קעורה, אבל איננה קעורה.

1.3.5 אפיון קמירות וקעירות בעזרת נגזרות

אפיון פונקציות יכול להתבצע הן דרך הנגזרות מסדר ראשון והן דרך הנגזרות מסדר שני. לשם כך נגדיר תחילה צמד אובייקטים בנוגע לנגזרות של פונקציות מרובות משתנים.

הגדרה 1.50 (גרדיאנט) הגרדיאנט (Gradient) של פונקציה $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ בנקודה x^{0} זה וקטור $\nabla f\left(x_{0}\right)=\left(\frac{\partial f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{1}},\ldots,\frac{\partial f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{i}},\ldots,\frac{\partial f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{n}}\right)$ שכל קוארדינטה i היא הנגזרת החלקית של הפונקציה, בנקודה x^{0}, לפי קוארדינטה x_{i}.

הגרדיאנט זה וקטור המייצג את כל הנגזרות החלקיות של פונקציה כלשהי בנקודה ספציפית. הוא מהווה הכללה של מושג הנגזרת. אם נגזרת מציינת את השיפוע של פונקציה עם משתנה אחד בנקודה כלשהי, אז הגרדיאנט הוא וקטור אשר מצביע על הכיוון בו הפונקציה גדלה בקצב המהיר ביותר. האנלוגיה למקרה החד־מימדי היא יחסית פשוטה. במקרה החד־מימדי פונקציה יכולה לעלות או לרדת, לכן הסימן של הנגזרת מייצג את הכיוון אליו הפונקציה נעה וגודל הנגזרת (בערך מוחלט) מייצג את הקצב. דבר דומה מתרחש במקרה הרב־מימדי. נניח ויש לנו פונקציה דיפרנציאבילית כלשהי והיא מייצרת משטח במרחב. אזי בכל נקודה הגרדיאנט יצביע על הכיוון בו הפונקציה גדלה הכי מהר. גודלו של הוקטור (אורכו) מעיד על קצב השינוי.

האינטואיציה לגבי הגרדיאנט עוזרת להבין את המשפט הבא שקובע כי פונקציה היא קעורה אם השיפוע בין שתי נקודות קטן או שווה למישור

משפט 1.51 אם הפונקציה f דיפרנציאבילית על קבוצה קמורה A, אזי היא קעורה אם ורק אם לכל צמד נקודות $x,y\in A$ מתקיים

$$f\left(x\right)\leq f\left(y\right)+\nabla f\left(y\right)\cdot\left(x-y\right).$$

מבחינה אינטואיטיבית, המשפט האחרון קובע שפונקציה היא קעורה אם ערכיה נמצאים מתחת למישור המשיק לפונקציה בנקודה סמוכה. בכדי להבין אותו כראוי, ננסה להציג במקרה החד־מימדי:

$$f\left(x\right)\leq f\left(y\right)+f'\left(y\right)\left(x-y\right).$$

אם $x<y$, אז הביטוי הנ"ל הופך ל־$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq f'\left(y\right)$, והשיפוע משמאל לנקודה קטן מן הנגזרת בנקודה. לעומת זאת, אם $x>y$, נקבל $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\geq f'\left(y\right)$ והשיפוע מימין לנקודה גדול מן הנגזרת בנקודה. זאת בדיוק המשמעות של פונקציה קעורה. (שרטטו והבינו!)

הכללה ישירה של מושג הגרדיאנט זה ההסייאן (Hessian), המיוצג על ידי מטריצה המורכבת מכל הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציה.

הגדרה 1.52 (הסייאן) ההסייאן (Hessian) של פונקציה $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ בנקודה x^{0} זו מטריצה

$$H_{f}\left(x_{0}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^{2}f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{1}^{2}} & \frac{\partial^{2}f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{1}\partial x_{2}} & \cdots & \frac{\partial^{2}f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{1}\partial x_{n}}\\ \frac{\partial^{2}f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{2}\partial x_{1}} & \frac{\partial^{2}f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{2}^{2}} & \cdots & \frac{\partial^{2}f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{2}\partial x_{n}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial^{2}f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{n}\partial x_{1}} & \frac{\partial^{2}f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{n}\partial x_{1}} & \cdots & \frac{\partial^{2}f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{n}^{2}}\end{pmatrix}$$

שכל תא $\left(i,j\right)$ מכיל את הנגזרת מסדר שני $\frac{\partial^{2}f\left(x^{0}\right)}{\partial x_{i}\partial x_{j}}$ של הפונקציה, בנקודה x^{0}.

הערה 1.53 אם הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציה הן רציפות, אז יש טענה שקובעת כי סדר הגזירה אינו משנה את הערך, לכן $\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j}$ לכל צמד קוארדינטות i,j, וההסייאן הוא מטריצה סימטרית.

תרגיל 1.54 חשבו את הגרדיאנט וההסייאן של הפונקציה $f(x,y,z) = 2xyz + 3xy^3z^2$ בנקודה $(1,0,1)$ ובנקודה $(3,1,2)$.

השימוש בהסייאן לטובת זיהוי קמירות וקעירות מצריך חישובי דטרמיננטות. לוקחים את ההסיאן ובכל פעם בוחרים מטריצה ריבועית על ידי מחיקה של שורות ועמודות אחרונות. עבור כל מרטיצה שכזאת מחשבים את הדטרמיננטה שלה והערכים המתקבלים מסייעים בזיהוי קעירות הפונקציה בהתאם למשפט הבא.

משפט 1.55 פונקציה דיפרנציאבילית $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, הגזירה פעמיים ברציפות, היא קעורה אמ"מ לכל $i = 1, \ldots, n$ מתקיים

$$(-1)^n \Delta_i = (-1)^n \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1i} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \ldots & f_{ii} \end{vmatrix} \geq 0.$$

אם הא"ש חזק אז הפונקציה קעורה ממש.

מספר הערות לגבי המשפט האחרון:

1. הטענה הנ"ל מתלכדת עם הידוע לנו על נגזרות בעלות משתנה בודד - פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ קעורה חזק אם ורק אם $f''(x) > 0$.
2. ניתן להשתמש בטענה האחרונה גם לזיהוי פונקציות קמורות, מאחר והפונקציה f היא קמורה אם ורק אם $-f$ היא קעורה. לכן הפעלת הטענה האחרונה על $-f$, תזהה אם f עצמה היא פונקציה קמורה חזק.
3. הדטרמיננטה Δ_i נקראת המינור הראשי ה־i של הפונקציה f.

תרגיל 1.56 תהיי פונקציה $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$. הוכיחו כי $\alpha + \beta < 1$ גורר שהפונקציה קעורה חזק.

פתרון: נחשב את המינורים הראשיים של הפונקציה.

$$\begin{aligned} (-1)^1 \Delta_1 &= -f_{11}(x,y) = -\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta > 0, \\ (-1)^2 \Delta_2 &= \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta & \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} \\ \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2} \end{vmatrix} \\ &= \alpha\beta(\beta-1)(\alpha-1)x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} - \alpha^2\beta^2 x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} \\ &= (1-\alpha-\beta)\left[x^{(\alpha-1)}y^{(\alpha-1)}\right]^2, \end{aligned}$$

והביטוי האחרון גדול מאפס אם $\alpha + \beta < 1$, כנדרש.

תרגיל 1.57 קבעו האם הפונקציה $f(x,y) = xy^2 + x^3y$ היא קמורה או קעורה בנקודה $(1,2)$.

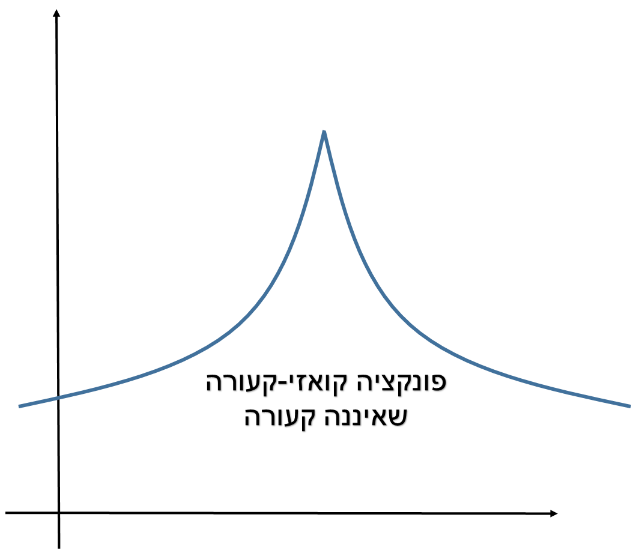
תרגיל 1.58 קבעו האם הפונקציה $f(x,y,z) = -x^2 - 2y - z^2 + x + 2z$ היא קעורה ב־$\mathbb{R}^3$.

תרגיל 1.59 מצאו תנאים על a,b,c כך שהפונקציה $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ תהיה קעורה.

טענה 1.60 תהיי פונקציה f קואזי־קעורה, דיפרנציאבילית, מונוטונית עולה וממש והומוגנית מדרגה 1. אזי הפונקציה היא קעורה.

תרגיל 1.61 הראו כי הפונקציה $f(x,y)=xy$ היא קואזי־קעורה ב־$\mathbb{R}_+^2$, אבל לא קעורה. (רמז: השתמשו באפיון לפי $(S_k(f)$)

דוגמה 1.62 נבחן את הטענה האחרונה על הפונקציה $f(x,y,z)=x^\alpha y^\beta z^\gamma$ כאשר $\alpha+\beta+\gamma=1$.



איור 7: פונקציה קואזי־קעורה שאיננה פונקציה קעורה. שימו לב שהכפלה של הפונקציה ב־(-1) תהפוך את הפונקציות לקואזי־קמורה שאיננה פונקציה קמורה.

1.3.6 אי־שיוויון יאנסן (Jensen's Inequality)

אחד האי־שיוויונים הנפוצים והשימושים ביותר בכלכלה הוא א"ש יאנסן. נקרא על שם המתמטיקאי הדני יוהאן יאנסן אשר הוכיח אותו כבר בשנת 1906.

משפט 1.63 (אי־שיוויון יאנסן) תהיי פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה. עבור כל קבוצת ערכים $x^1,x^2,\ldots,x^n$ ומשקולות חיוביות ממש $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ שסכומן $\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$ מתקיים

$$f\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i x^i\right)\le\sum_{i=1}^n\alpha_i f\left(x^i\right).$$

הערה 1.64 שימו לב שא"ש יאנסן מתהפך אם הפונקציה היא קעורה. ז"א, עבור פונקציה קעורה נקבל $f\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i x^i\right)\ge\sum_{i=1}^n\alpha_i f\left(x^i\right)$.

השימושים לא"ש יאנסן הם רבים. ניקח לדוגמא פונקצית תועלת של מקבל החלטות שונא־סיכון. אנו יודעים שמשמעות שנאת הסיכון היא קעירות של פונקצית התועלת. לכן נניח כי $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה קעורה. כעת מקבל ההחלטות צריך לבחור בין 2 אפשרויות. הראשונה מעניקה לו פרסים $x^1,\ldots,x^n$ בהסתברויות $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ בהתאמה, ואילו השנייה מעניקה לו פרס $\sum_{i=1}^n\alpha_i x^i$ בהסתברות אחת. מקבל ההחלטות שונא סיכון לכן, לפי א"ש יאנסן, התועלת שלו מהפרס הוודאי גבוהה יותר מתוחלת התועלת שלו בהגרלה הראשונה, ומתמטית

$$u\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i x^i\right)\ge\sum_{i=1}^n\alpha_i u\left(x^i\right).$$

באופן כללי, עבור כל משתנה מקרי X ופונקצית תועלת קעורה נקבל ש־ $E\left[u\left(X\right)\right] \leq u\left(E\left[X\right]\right)$. במילים, תוחלת התועלת מהפרס קטנה מן התועלת שנוצרת מתוחלת הפרס. מקבל ההחלטות מעדיף לקבל את התוחלת בהסתברות 1, בניגוד לתוחלת התועלת המתקבלת מבחירת ההגרלה X. שימו לב שטענה זאת נכונה באופן כללי עבור משתנה מקרי X כלשהו.

דוגמה 1.65 נסתכל על משקיע שונא סיכון עם פונקצית תועלת קעורה, מונוטונית־עולה. יש בידו סוכם כסף $w > 0$ והוא צריך להחליט כמה כסף להשקיע בנכס חסר־סיכון עם תשואה קבועה של $1 + r_f$ לעומת השקעה בנכס מסוכן עם תשואה $1 + \tilde{r}$ (כאשר $\tilde{r}$ הוא משתנה מקרי כלשהו). במידה ויפצל את כספו ל־αw בנכס הבטוח ו־$\left(1-\alpha\right) w$ בנכס המסוכן, תוחלת התועלת שלו תהיה $u_\alpha = E\left[u\left(\alpha w\left(1+r_f\right) + \left(1-\alpha\right) w\left(1+\tilde{r}\right)\right)\right]$. מליניאריות התוחלת וא"ש יאנסן נובע ש־

$$\begin{aligned} u_\alpha &\leq u\left(E\left[\alpha w\left(1+r_f\right) + \left(1-\alpha\right) w\left(1+\tilde{r}\right)\right]\right) \\ &= u\left(E\left[w\left(1+\alpha r_f\right) + \left(1-\alpha\right) w\tilde{r}\right]\right) \\ &= u\left(w\left(1 + r_f + \left(1-\alpha\right)\left(E\left[\tilde{r}\right] - r_f\right)\right)\right). \end{aligned}$$

אם $E\left[\tilde{r}\right] \leq r_f$ (תוחלת התשואה של הנכס המסוכן קטנה מתוחלת התשואה של הנכס הבטוח), אז

$$u_\alpha \leq u\left(w\left(1+r_f\right)\right) = u_1,$$

ומקבל ההחלטות ישקיע את כל כספו בנכס הבטוח. כמובן שאם מקבל ההחלטות אוהב סיכון ו־$E\left[\tilde{r}\right] \geq r_f$ אז נקבל תוצאה הפוכה וכל הכסף יושקע בנכס המסוכן.

1.4 אופטימיזציה ללא אילוצים

טענה 1.66 תהיי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה ו־$f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה קעורה עם מקסימום לוקאלי ב־x^0. אזי נקודת המקסימום x^0 היא נקודת מקסימום גלובאלית.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת נקודה אחרת $x^1 \in A$, שונה מ־x^0, כך ש־ $f\left(x^1\right) > f\left(x^0\right)$. יהי $\alpha \in (0,1)$. מקעירות נובע כי

$$f\left(\alpha x^0 + \left(1-\alpha\right) x^1\right) \geq \alpha f\left(x^0\right) + \left(1-\alpha\right) f\left(x^1\right) > \alpha f\left(x^0\right) + \left(1-\alpha\right) f\left(x^0\right) = f\left(x^0\right).$$

זאת אומרת, עבור כל $0 < \alpha < 1$, הפונקציה בנקודה $\alpha x^0 + \left(1-\alpha\right) x^1$ גבוהה יותר מהפונקציה בנקודה x^0. נוכל לקחת את α קרוב כרצוננו ל־1, ובכך מתקבלת סתירה לנתון ש־x^0 היא נקודת מקסימום לוקאלית כי יש בכל סביבה שלה נקודה מהצורה $\alpha x^0 + \left(1-\alpha\right) x^1$ שמניבה ערך גבוה יותר. ■

טענה 1.67 אם פונקציה היא קואזי־קעורה חזק על קבוצה קמורה, אז יש לה לכל היותר נקודת מקסימום אחת בקבוצה.

הוכחה: נניח בשלילה שיש צמד נקודות מקסימום, $x, y \in A$ כך ש־ $f\left(x\right) = f\left(y\right) \geq f\left(z\right)$ לכל $z \in A$. בגלל קמירות A וקואזי־קעירות חזקה של f נובע כי $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in A$ ו־

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) > \min\left\{f\left(x\right), f\left(y\right)\right\} = f\left(x\right) = f\left(y\right),$$

בסתירה למקסימאליות של x ו־y. ■

תרגיל 1.68 תהיי פונקציה f קעורה על קבוצה קמורה $A \subset \mathbb{R}^n$. הראו שקבוצת כל נקודות המקסימום של f היא קבוצה קמורה.

יישום פשוט לטענה האחרונה נוגע לצרכן עם פונקצית תועלת u המוגדרת בשוק עם n מוצרים. נניח שפונקצית התועלת רציפה וקואזי־קעורה חזק על קבוצת כל הסלים האפשריים, $\mathbb{R}_{+}^{n}$. נניח שיש לצרכן תקציב w וקיימת מערכת מחירים $p \in \mathbb{R}_{+}^{n}$. ראינו כי קבוצת התקציב היא קומפקטית (בהנחה והמחירים חיוביים ממש) וכן ראינו שזאת קבוצה קמורה. לכן, הטענה האחרונה קובעת כי יש סל צריכה יחיד שממקסם את התועלת של הצרכן. למעשה, העתקת הביקוש $D(p,w)$ אשר מחזירה עבור כל צמד (p,w) של וקטור מחירים ותקציב, את הסלים האופטימליים היא חד־ערכית, כי הסל האופטימלי הוא יחיד.